View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk

brought to you by CORE

provided by Elsevier - Publisher Connector

JOURNAL OF MATHEMATICAL ANALYSIS AND APPLICATIONS 41, 148–163 (1973)

Sur un Théorème d'Interpolation

MICHEL ARTOLA

Unité de Mathématiques et Informatique,
Université de Bordeaux I, Talence, France

Submitted by J. L. Lions

INTRODUCTION

Plusieurs auteurs se sont intéressés à des propriétés de dérivées intermédiaires; voir (par ordre chronologique) [11, 10, 8, 19] pour les cas "scalaires" [15, 14, 3, 1, 2] pour les "cas vectoriels" pondérés ou non.

Cependant le théorème hilbertien de [15] n'a pas reçu semble-t-il de généralisation satisfaisante au cas "Banach".

En effet, le résultat de [15] de nature très générale obtenu à l'aide du "foncteur Trace" ne redonne pas le résultat hilbertien.

Nous présentons ici par utilisation du "foncteur holomorphe" un théorème de dérivées intermédiaires dans un cadre "Banach restreint", mais suffisant pour les applications, qui se réduit au résultat de [15] dans le cas hilbertien. Pour l'intérêt de tels résultats nous renvoyons à [1, 3, 17].

Dans la Section 1, on donne les notations générales et on énonce le théorème principal, en se limitant pour simplifier aux cas de fonctions définies sur la droite.

Une première démonstration de ce théorème, utilisant la transformation de Fourier et des propriétés d'interpolation de $\mathscr{F}L^p$ et basée sur l'hypothèse (condition M) que dans les espaces de Banach considérés le théorème de Mihlin sur les multiplicateurs est vrai, est donnée à la Section 2.

Dans la Section 3, on donne une seconde démonstration utilisant les propriétés de la convolution au sens des distributions vectorielles avec la famille de distributions tempérées

$$\frac{1}{\Gamma(-z)} Pf \frac{1}{x_+^{z+1}}; \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

Cette démonstration est valable pour les espaces $L^p(B)$ (B Banach) dans lesquels la dérivée d'ordre complexe $D^{i\eta}$ ($\eta \in \mathbb{R}$) opère (condition $\mathscr{C}$) et est susceptible d'extension aux espaces L^p avec poids.

En fait, la condition M entraine la condition $\mathscr{C}$ mais nous ignorons si la

Copyright © 1973 by Academic Press, Inc.
All rights of reproduction in any form reserved.

réciproque est vraie en l'absence d'une caractérisation convenable des espaces dans lesquels ces conditions sont vérifiées.

La Section 4 donne des exemples d'espaces d'usage courant dans les applications. Ils vérifient tous la condition M.

Enfin, nous avons signalé en remarque les généralisations aux espaces de fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$.

Ces résultats ont été exposé au Colloque d'Analyse fonctionnelle de Bordeaux (Avril 1971) et au Séminaire d'Analyse de la Faculté des Sciences d'Orsay.

Je remercie MM. Ch. Goulaouic, S. M. Baouendi et L. Boutet de Monvel avec qui j'ai eu de fructueuses conversations sur ce sujet lors de ces exposés.

1. Le théorème principal

1.1. *Hypothèses et Notations Générales*

D'une manière générale, si $\mathscr{B}$ est un espace de Banach, on note $L^p(\mathscr{B})$ ($1 \leqslant p \leqslant +\infty$) l'espace des (classes de) fonctions u fortement mesurables (pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$) à valeurs dans $\mathscr{B}$ telles que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(t)|_{\mathscr{B}}^p \, dt < +\infty$$

(modification habituelle pour $p = \infty$). Muni de la norme naturelle, $L^p(\mathscr{B})$ est un espace de Banach.

On considère deux espaces de Banach complexes A_0 et A_m contenus avec injection continue dans un espace vectoriel topologique localement convexe $\mathfrak{A}$.

On suppose:

$$\begin{array}{lll} A_0 \cap A_m & \text{dense dans chaque } A_j & (j = 0, m), \\ A_j & \text{réflexif} & (j = 0, m). \end{array} \tag{1.1}$$

On peut alors définir l'espace $A_0 + A_m$, qui, muni de la topologie de:

$$\frac{A_0 \times A_m}{Z} \qquad (Z = \ker\{(a_0, a_m) \to a_0 + a_m, a_j \in A_0 \cap A_m, j = 0, m\})$$

est un espace de Banach [9].

On se donne encore $p_0, p_m > 1$ et l'on pose:

$$X_j = L^{p_j}(A_j) \qquad j = 0, m \tag{1.2}$$

et si $\mathscr{F}$ désigne la transformation de Fourier au sens des distributions à valeurs vectorielles [23], on note:

$$\begin{gathered}\hat{X}_j = \mathscr{F}(X_j), \qquad j = 0, m, \\ \text{espace de Banach pour la norme transportée par } \mathscr{F}.\end{gathered} \tag{1.3}$$

De même, $\hat{u}$ désignera la transformée de Fourier de u. Ceci posé, pour $m \geqslant 1$, on considère l'espace: (Pour simplifier on considère le cas $n = 1$)

$$\begin{gathered}W^{(m)}_{p_0, p_m} = \{u \mid u \in X_0 \,,\, D^m u \in X_m\} \\ (D^m \text{ dérivée au sens des distributions vectorielles [23].)}\end{gathered} \tag{1.4}$$

qui est un espace de Banach pour la norme naturelle:

$$\| u \|_{W^{(m)}_{p_0, p_m}} = \| u \|_{X_0} + \| D^m u \|_{X_m} \tag{1.5}$$

On introduit enfin:

$$\begin{aligned} Y_{-z} &= \frac{1}{\Gamma(-z)} Pf \frac{1}{x_+^{z+1}} \qquad && \forall z \notin \mathbb{N} \quad (z \in \mathbb{C}) \\ Y_{-k} &= \delta^{(k)} && k \in \mathbb{N} \end{aligned} \tag{1.6}$$

La fonction $z \to Y_{-z}$ est ainsi une fonction analytique de la variable complexe z à valeurs dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$.

1.2. *Le Théorème Principal*

Nous allons considérer les conditions suivantes (sur les espaces!)

Condition (M):

$$A_j \quad (j = 0, m) \qquad \text{tel que le théorème de Mihlin sur les multiplicateurs de Fourier soit vrai dans } \hat{X}_j \text{ [18].} \tag{1.7}$$

ou:

Condition ($\mathscr{C}$):

$$\begin{gathered} A_j \quad (j = 0, m) \qquad \text{est tel que} \\ \forall \eta \in \mathbb{R},\ Y_{-i\eta} \text{ est un convoluteur de } X_j \ (j = 0, m). \end{gathered} \tag{1.8}$$

Comme nous le verrons plus loin, la condition (1.7) entraîne la condition (1.8), mais nous ignorons si la réciproque est vraie. On a alors le:

THÉORÈME I. *On suppose* (1.1), (1.7) *ou* (1.8) *vérifiés. Dans ces conditions, l'application :*

$$u \to D^j u$$

est continue de :

$$W^m_{p_0,p_m} \to L^{p_j}[(A_0, A_m)\, j/m] \qquad 0 < j < m$$

où :

$$\frac{1}{p_j} = \frac{(1-j/m)}{p_0} + \frac{j/m}{p_m}.$$

2. Première démonstration du théorème I

Elle est basée sur les propriétés de la transformation de Fourier et la condition (M).

On note tout d'abord le:

Lemme 2.1. *Soit Φ un foncteur d'interpolation.*
$\mathscr{F}$ est un isomorphisme de $\Phi(X_0, X_m)$ sur $\hat{\Phi}(X_0, X_m)$ et l'on a :

$$\hat{\Phi}(X_0, X_m) = \Phi(\hat{X}_0, \hat{X}_m).$$

Vérification du Lemme 2.1. On a:

$$\mathscr{F} \in \mathscr{L}(X_j, \hat{X}_j), \qquad \mathscr{F}^{-1} \in \mathscr{L}(\hat{X}_j, X_j), \qquad j = 0, m, \tag{2.1}$$

d'où, $\mathscr{F}$ étant injective de $\mathscr{S}'(A_0 + A_m) \to \mathscr{S}'(A_0 + A_m)_v$ on en déduit par interpolation:

$$\begin{aligned} &\mathscr{F} \in \mathscr{L}(\Phi(X_0, X_m), \Phi(\hat{X}_0, \hat{X}_m)),\\ &\mathscr{F}^{-1} \in \mathscr{L}(\Phi(\hat{X}_0, \hat{X}_m), \Phi(X_0, X_m)), \end{aligned} \tag{2.2}$$

et l'on a:

$$\Phi(\hat{X}_0, \hat{X}_m) = \hat{\Phi}(X_0, X_m) \tag{2.3}$$

algébriquement et topologiquement de manière immédiate.

2.2. Désignons par:

$$\hat{W}^{(m)}_{p_0,p_m} = \{v \mid v \in \hat{X}_0, \mid \xi \mid^m v \in \hat{X}_m\} \tag{2.4}$$

muni de la norme

$$\| v \|_{\hat{W}^{(m)}_{p_0,p_m}} = \| v \|_{\hat{X}_0} + \| \mid \xi \mid^m v \|_{\hat{X}_m} \tag{2.5}$$

C'est un espace de Banach isomorphe à $\mathscr{F}(W^{(m)}_{p_0,p_m})$.

Comme d'après le lemme 2.1 et l'hypothèse 1.1, on a:

$$\begin{gathered}(X_0, X_m)\, s/m = L^{p_s}[(A_0, A_m)\, s/m] \qquad 0 < s < m, \\ \frac{1}{p_s} = \frac{1 - s/m}{p_0} + \frac{s/m}{p_m}, \qquad \mathscr{F}(L^{p_s}[(A_0, A_m)\, s/m] = (\hat{X}_0, \hat{X}_m)\, s/m\end{gathered} \tag{2.6}$$

tout revient à montrer:

$$\hat{u} \to |\, \xi\,|^s\, \hat{u} = T_s \hat{u} \qquad 0 < s < m$$

est continue de

$$\hat{W}^{(m)}_{p_0, p_m} \to (\hat{X}_0, \hat{X}_m)\, s/m\,. \tag{2.7}$$

2.3. Notons que nous avons le schéma:

$$\begin{gathered}\hat{W}^{(m)}_{p_0, p_m} \xrightarrow{T_0} \hat{X}_0 \hookrightarrow \hat{X}_0 + \hat{X}_m \\ \hat{W}^{(m)}_{p_0, p_m} \xrightarrow{T_m} \hat{X}_m \hookrightarrow \hat{X}_0 + \hat{X}_m\end{gathered} \tag{2.8}$$

et introduisons la fonction de la variable complexe z:

$$z \to U(z) = T_{mz} \hat{u}$$

Désignons par:

$$\begin{gathered}\mathring{B} = \{z \in \mathbb{C};\, z = \rho + i\eta,\, 0 < \rho < 1,\, \eta \in \mathbb{R}\}, \\ \bar{B} = \{z \in \mathbb{C};\, z = \rho + i\eta,\, 0 \leqslant \rho \leqslant 1,\, \eta \in \mathbb{R}\}.\end{gathered} \tag{2.9}$$

Alors:

$$\begin{gathered}U \text{ est holomorphe bornée de } \mathring{B} \to \hat{X}_0 + \hat{X}_m\,, \\ \text{et continue de } \bar{B} \to \hat{X}_0 + \hat{X}_m\,.\end{gathered} \tag{2.10}$$

(avec un choix convenable de la détermination de k^z).

En effet, d'une part l'holomorphie et la continuité sont immédiates; d'autre part, on peut écrire:

$$\begin{gathered}T_{mz}\hat{u}(\xi) = \frac{|\, \xi\,|^{m\rho}}{1 + |\, \xi\,|^m} [\Psi_0 + \Psi_m] = \tilde{\Psi}_0 + \tilde{\Psi}_m\,, \\ \Psi_j \in \hat{X}_j\,, \qquad j = 0, m,\end{gathered} \tag{2.11}$$

et l'on a: (condition de Mihlin [18]

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \left|\, |\, \xi\,|\, D \frac{|\, \xi\,|^{m\rho}}{1 + |\, \xi\,|^m} \right| < +\infty \tag{2.12}$$

donc $|\xi|^{mp}/(1+|\xi|^m)$ est un multiplicateur de $\hat{X}_j$ $(j=0, m)$ et:

$$\tilde{\Psi}_j \in \hat{X}_j\,, \qquad j=0, m \tag{2.13}$$

d'où (2.10).

Ainsi, comme d'après (2.8):

$$\begin{aligned} \sup_{\eta\in\mathbb{R}} \| U(i\eta)\|_{X_0} &\leqslant C_0 \| u \|_{X_0}\,, \\ \sup_{\eta\in\mathbb{R}} \| U(1+i\eta)\|_{X_m} &\leqslant C_m \| u \|_{X_m}\,, \end{aligned} \tag{2.14}$$

on déduit de (2.10) par interpolation holomorphe [5]

$$U(s/m) \in (\hat{X}_0\,, \hat{X}_m)\, s/m \tag{2.15}$$

avec

$$\| U(s/m)\|_{(\hat{X}_0,\hat{X}_m)s/m} \leqslant C \| u \|_{X_0}^{1-s/m} \cdot \| D^m u \|_{X_m}^{s/m} \tag{2.16}$$

Remarque 2.1. Le théorème et la démonstration s'étendent au cas de $n>1$. Dans ce cas:

$$W^{(m)}_{p_0,p_m} = \left\{ \begin{array}{l} u \mid u \in L^{p_0}(A_0),\ D^\beta u \in L^{p_m}(A_m) \text{ pour tout } \beta=\{\beta_1\,,\ldots, \beta_n\} \\ \text{avec } |\beta| = \beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n = m \end{array} \right.$$

est un espace de Banach pour la norme:

$$\| u \|_{W^{(m)}_{p_0,p_m}} = \| u \|_{X_0} + \sum_{|\beta|=m} \| D^\beta u \|_{X_m}$$

on obtient:

$$\begin{aligned} &\text{Pour tout } \alpha \text{ avec} \qquad 1<|\alpha|<m, \qquad \theta = \frac{|\alpha|}{m} \\ &D^\alpha u \in L^{p_\theta}((A_0\,, A_m)_\theta), \qquad \frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_m} \end{aligned} \tag{2.17}$$

et

$$\| D^\alpha u \|_{L^{p_\theta}((A_0,A_m)_\theta)} \leqslant C_\alpha \| u \|_{X_0}^{1-\theta} \Big(\sum_{|\beta|=m} \| D^\beta u \|_{X_m} \Big)^\theta . \tag{2.18}$$

3. Deuxième démonstration du théorème I

Elle repose sur la condition $(\mathscr{C})$ et les propriétés de la convolution avec $Y_{-z}\,,\ z \in \mathbb{C}$.

3.1. *Un Lemme.*

Posant $\Lambda = D^m$, nous avons le shéma suivant:

$$\begin{aligned} &W^{(m)}_{p_0,p_m} \xrightarrow{I} X_0 \hookrightarrow X_0 + X_m \\ &W^{(m)}_{p_0,p_m} \xrightarrow{\Lambda} X_m \hookrightarrow X_0 + X_m \end{aligned} \tag{3.1}$$

Nous allons démontrer le:

LEMME 3.1. *On suppose* 1 — 1, *et la condition* ($\mathscr{C}$) *vérifiées. Alors pour*

$$z = \rho + i\zeta, \qquad 0 \leqslant \rho \leqslant 1,$$

$$\Lambda^z = \frac{1}{\Gamma(-mz)} Pf \frac{1}{x_+^{mz+1}} * \qquad (\text{* désigne la convolution})$$

est un opérateur qui envoie continûment $W^{(m)}_{p_0,p_m}$ *dans* $X_0 + X_m$.

Preuve du Lemme 3.1. D'après sa définition pour $u \in W^{(m)}_{p_0,p_m}$, $\Lambda^z u(t)$ prend ses valeurs (p.p. en t) dans $A_0 + A_m$ et la conclusion du lemme est trivialement vérifiée pour $\rho = 0$ et $\rho = 1$. Par ailleurs, comme $\mathscr{D}(\mathbb{R}; A_0 \cap A_m)$ est, d'après 1 — 1, dense dans $W^{(m)}_{p_0,p_m}$ il suffit de montrer le résultat pour $u \in \mathscr{D}(\mathbb{R}; A_0 \cap A_m)$. D'après [22]:

$$Y_{-m+(1-\rho)m-i\eta} = Y_{(1-\rho)m} * Y_{-m} * Y_{-i\eta} \qquad (\eta = -m\zeta) \tag{3.2}$$

donc si

$$\tilde{u} = Y_{-i\eta} * u \qquad (\tilde{u} \in X_0 \text{ d'après 1.8}) \tag{3.3}$$

on a

$$\Lambda^z u(t) = Y_{(1-\rho)m} * D^m \tilde{u} \tag{3.4}$$

avec

$$D^m \tilde{u} \in X_m \qquad \text{d'après 1.8.} \tag{3.5}$$

Ainsi:

$$\Lambda^z u(t) = \frac{1}{\Gamma((1-\rho)\,m)} \int_{-\infty}^{t} (t-x)^{(1-\rho)m-1} D^m \tilde{u}(x)\, dx \tag{3.6}$$

(ce qui a un sens car $(1-\rho)\,m - 1 > -1$ pour $0 < \rho < 1$ et que $D^m\tilde{u}$ a un support limité à gauche).

Or, il est possible de trouver deux fonctions φ_1 et φ_2 vérifiant:

$$\begin{gathered} \varphi_1(t) = \varphi_2(t) = 0 \quad \text{si} \quad t < 0, \qquad \varphi_1(t) + \varphi_2(t) = 1 \quad \text{si} \quad t > 0 \\ D^j[t^{(1-\rho)m-1}\varphi_1](0) = 0 \qquad 0 \leqslant j \leqslant m-1 \\ D^m[t^{(1-\rho)m-1}\varphi_1] \in L^1(\mathbb{R}^+), \qquad 0 < \rho < 1 \\ t^{(1-\rho)m-1}\varphi_2 \in L^1(\mathbb{R}^+), \qquad 0 < \rho < 1 \end{gathered} \tag{3.7}$$

(en effet,

$$\varphi_1(t) = \frac{t^m}{e^{-t} + t^m} \quad t > 0; \qquad \varphi_1(t) = 0, \quad t \leqslant 0$$

$$\varphi_2(t) = \frac{e^{-t}}{e^{-t} + t^m} \quad t > 0; \qquad \varphi_2(t) = 0, \quad t < 0$$

vérifient ces conditions).

En conséquence:

$$\begin{aligned}
&\Lambda^z u(t) = \Psi_0(t) + \Psi_m(t), \qquad \Psi_j \in X_j\,, \qquad (j = 0, m)\\
&\Psi_0(t) = \frac{1}{\Gamma((1-\rho)\,m)}\, D^m[t^{(1-\rho)m-1}\varphi_1 * \tilde{u}]\\
&\Psi_m = \frac{1}{\Gamma((1-\rho)\,m)}\, t^{(1-\rho)m-1}\varphi_2 * D^m\tilde{u}\\
&\|\,\Psi_0\,\|_{X_0} \leqslant C_0(\rho, m)\,\|\,D^m(t^{(1-\rho)m-1}\varphi_1)\|_{L^1}\cdot\|\,\tilde{u}\,\|_{X_0}\\
&\|\,\Psi_m\,\|_{X_m} \leqslant C_m(\rho, m)\,\|\,t^{(1-\rho)m-1}\varphi_2\,\|_{L^1}\cdot\|\,D^m\tilde{u}\,\|_{X_m}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

d'où le lemme.

3.2. *Démonstration du Théorème.*

(i) On note que si la condition ($\mathscr{C}$) a lieu, $\{Y_{-i\eta^*}\}_{\eta\in\mathbb{R}}$ définit un groupe d'opérateurs de classe $\mathbb{C}^0$ opérant dans X_j ($j = 0, m$). D'après les propriétés des semi-groupes de classe $\mathbb{C}^0$, on a:

$$\begin{gathered}
\forall\eta\in\mathbb{R}\\
\|\,Y_{-i\eta^*}\,\|_{\mathscr{L}(X_j,X_j)} \leqslant \gamma e^{\alpha|\eta|}\\
\alpha \text{ et } \gamma \text{ ctes} > 0.
\end{gathered} \tag{3.9}$$

(on peut préciser α cf. Section 4).

Dans ces conditions, on peut trouver:

$$z \to \chi(z)$$

une fonction scalaire *holomorphe* dans $\mathring{B}$ et *continue* dans $\bar{B}$ ($\mathring{B}$, $\bar{B}$ définis à la Section 2) vérifiant:

$$\begin{gathered}
\sup_{\zeta\in\mathbb{R}} |\,\chi(i\zeta)|\, e^{\alpha|\zeta|} < +\infty\\
\sup_{\zeta\in\mathbb{R}} |\,\chi(1 + i\zeta)|\, e^{\alpha|\zeta|} < +\infty\\
\chi(\rho) \neq 0, \qquad 0 \leqslant \rho \leqslant 1.
\end{gathered} \tag{3.10}$$

(on peut prendre

$$\beta > \alpha \qquad \text{et} \qquad \chi(z) = \frac{\prod_{k=0}^{N(\beta)} \left(z - \frac{k\pi}{\beta}\right)}{\sin \beta z}$$

ou encore $\chi(z) = e^{(z-\theta)^2}$ voir [17]).

(ii) Dans ces conditions, considérons la fonction (définie p.p. en t) par:

$$\{(z, t) \to f(z, t) = \chi(mz)\, \Lambda^z u(t),\ u \in W_{p_0,p_m}^{(m)}\} \tag{3.11}$$

et soit:

$$f(z) : t \to f(z, t). \tag{3.12}$$

La fonction $f(z \to f(z))$ est (avec le choix de $\chi(z)$ donné plus haut):

$$\begin{aligned} &\text{(i) holomorphe bornée de } \mathring{B} \to X_0 + X_m\,, \\ &\text{(ii) continue de } \bar{B} \to X_0 + X_m\,, \end{aligned} \tag{3.13}$$

de plus, d'après (3.10), elle vérifie:

$$\begin{aligned} \sup_{\zeta \in \mathbb{R}} \| f(i\zeta)\|_{X_0} &\leqslant C_0 \| u \|_{X_0}\,, \\ \sup_{\zeta \in \mathbb{R}} \| f(1 + i\zeta)\|_{X_m} &\leqslant C_m \| D^m u \|_{X_m}\,. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Alors [5, 17, 20]

$$\begin{aligned} &\text{Pour } \theta \in]0, 1[\\ &f(\theta) \in (X_0\,, X_m)_\theta = L^{p_\theta}((A_0\,, A_m)_\theta) \\ &\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_m} \end{aligned} \tag{3.15}$$

avec

$$\| f(\theta)\|_{(X_0, X_m)_\theta} \leqslant C \| u \|_{X_0}^{1-\theta} \cdot \| D^m u \|_{X_m}^{\theta} \tag{3.16}$$

d'où le résultat avec $\theta = s/m$ $(0 < s < m)$ compte tenu de ce que $\chi(s) \neq 0$. D'où le théorème I qui redonne en particulier (et très simplement) les résultats de [11] par une autre méthode.

Remarque 3.1. Pour le cas de n quelconque, on considérera avec $\eta = (\eta_1, ..., \eta_n)$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$:

$$Y_{-i\eta} = Y_{-i\eta_1}^1 \otimes Y_{-i\eta_2}^2 \otimes \cdots \otimes Y_{-i\eta_n}^n; \qquad Y_{-i\eta_j}^j = \frac{1}{\Gamma(-i\eta_j)}\, Pf \frac{1}{x_{j+}^{i\eta_j+1}} \tag{3.17}$$

et la fonction:

$$z \to F(z) = \chi(z)\, Y_{-z\beta} * u = (\chi(z)\, Y^1_{-z\beta_1} \otimes Y^2_{-z\beta_2} \otimes \cdots \otimes Y^n_{-z\beta_n}) * u$$

$$\text{où} \qquad \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \mid \beta \mid = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n = m \tag{3.18}$$

$$\chi(z) = \prod_{j=1}^{n} \chi_j(z) \text{ où } \chi_j(z) \text{ est une fonction scalaire convenable.}$$

La méthode précédente s'applique et redonne les mêmes résultats que ceux énoncés à la remarque 2.1 avec $\theta = \mid \alpha \mid / m$.

Remarque 4.1. Soit $\mathscr{H}(X_0, X_m)$ l'espace des fonctions f continues dans $\bar{B}$, holomorphes dans $\mathring{B}$ telles que $\eta \to f(i\eta)$ (resp. $f(1 + i\eta)$ soient bornées dans X_0 (resp. dans X_m).

On désigne par $\mathscr{H}_{\exp}(X_0, X_m)$ l'espace analogue à $\mathscr{H}(X_0, X_m)$ mais avec

$$\begin{aligned} \| e^{-k|\eta|} f(i\eta) \|_{X_0} &\leqslant C \\ \| e^{-k|\eta|} f(1 + i\eta) \|_{X_m} &\leqslant C \end{aligned} \tag{3.19}$$

et on définit ensuite

$$[X_0, X_m]_{\theta,\exp} = \text{espace parcouru par } f(\theta) \text{ lorsque } f \text{ parcourt } \mathscr{H}_{\exp}(X, Y) \text{ avec la norme quotient par le noyau de } f \to f(\theta). \tag{3.20}$$

Alors [voir [17]],

$$[X_0, X_m]_{\theta,\exp} = [X_0, X_m]_\theta . \tag{3.21}$$

Dans le résultat (3.16) la constante C peut donc être choisie indépendante de la fonction χ.

4. Compléments sur l'étude de $\{Y_{-i\eta^*}\}_{\eta \in \mathbb{R}}$

Dans ce paragraphe, nous dégageons quelques propriétés simples des espaces B dans lequels $\{Y_{-i\eta^*}\}_{\eta \in \mathbb{R}}$ opère, mais nous ne connaissons pas de caractérisation de ceux-ci.

4.1. *Propriétés Générales*

PROPOSITION 4.1. *Soit A_j $j = 0, m$ dans la situation de la Section* 1. *On suppose qu'il existe p_j ($j = 0, m$) tel que $\{Y_{-i\eta^*}\}_{\eta \in \mathbb{R}}$ opère dans X_j .*

On pose

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_m}, \qquad \theta \in]0, 1[.$$

Alors $\{Y_{-i\eta^*}\}_{\eta\in\mathbb{R}}$ *opère dans* $L^p[(A_0, A_m)_{\theta,p}]$ *et* $L^p[(A_0, A_m)_\theta]$.

Démonstration. Il est immédiat que $\{Y_{-i\eta^*}\}_{\eta\in\mathbb{R}}$ *opère dans* $(X_0, X_m)_{\theta,p}$ *et* $(X_0, X_m)_\theta$; l'hypothèse (1.1) entraîne:

$$\begin{aligned} (X_0, X_m)_{\theta,p} &= L^p[(A_0, A_m)_{\theta,p}], \\ (X_0, X_m)_\theta &= L^p[(A_0, A_m)_\theta] \end{aligned} \tag{4.1}$$

d'où la Proposition 4.1.

— Soit maintenant A un espace de Banach réflexif, A' son dual.

On note:

— $\mathscr{D}(\mathbb{R}; A) = \mathscr{D}(A)$ l'espace des fonctions $\mathbb{C}^\infty$ à support compact à valeurs dans A.

— $\mathscr{D}'(A')$ l'espace des distributions correspondant à l'accouplement $\langle, \rangle$ (dualité entre A et A').

On pose:

$$\forall\epsilon > 0, \qquad K_\epsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^{i\eta+1}} & x \geqslant \epsilon \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \tag{4.2}$$

et

$$\begin{gathered} k_2(\eta; \varphi, \Psi) = \frac{1}{\Gamma(-i\eta)} \int_{\mathbb{R}^2} < K_\epsilon(y-x)\, \varphi(x), \qquad \Psi(y) > dx\, dy \\ \forall\varphi \in \mathscr{D}(A), \qquad \forall\Psi \in \mathscr{D}(A'). \end{gathered} \tag{4.3}$$

Dans ces conditions, on a:

$$\langle Y_{-i\eta} * \varphi, \Psi\rangle = \lim_{\epsilon\to 0} \left\{ k_\epsilon(\eta; \varphi, \Psi) + \frac{i}{\eta} \frac{\epsilon^{-i\eta}}{\Gamma(-i\eta)} \int_{\mathbb{R}} \langle\varphi(y), \Psi(y)\rangle\, dy \right\}. \tag{4.4}$$

Par ailleurs, la formule (4.3) montre que l'opérateur ${}^tK_\epsilon$ transposé de K_ϵ défini par $k_\epsilon(\eta; \varphi, \Psi)$ possède des propriétés analogues à celles de K_ϵ. Il en résulte:

PROPOSITION 4.2. *Soit A un espace de Banach réflexif, A' son dual. Si* $\{Y_{-i\eta^*}\}_{\eta\in\mathbb{R}}$ *opère dans* $L^p(A)$, $\{Y_{-i\eta^*}\}_{\eta\in\mathbb{R}}$ *opère dans* $L^{p'}(A')$, $1/p' + 1/p = 1$.

4.2. EXEMPLE I. On suppose $A = H$ espace de Hilbert. On désigne par $|\ |$, $(,)$ la norme et le produit scalaire dans H. On identifie H et H'.

Notons $\mathscr{C}_p(H)$ l'espace des convoluteurs de $L^p(H)$ $1 < p < +\infty$ normé par:

$$L \in \mathscr{C}_p(H), \qquad \| L \|_{\mathscr{C}_p} = \| L^* \|_{\mathscr{L}(L^p(H), L^p(H))} . \tag{4.5}$$

On a tout d'abord la:

PROPOSITION 4.3.

(i) $\forall \eta \in \mathbb{R}$, $Y_{-i\eta} \in \mathscr{C}_p(H)$,

(ii) $\forall \eta \in \mathbb{R}$

$$\| Y_{-i\eta} \|_{\mathscr{C}_p} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{(\pi/2)|\eta|} = \| \hat{Y}_{-i\eta} \|_\infty = \| Y_{-i\eta} \|_{\mathscr{C}_2} . \tag{4.6}$$

Démonstration. Le calcul de la transformée de Fourier au sens des distributions de $Y_{-i\eta}$ donne:

$$\hat{Y}_{-i\eta}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{cases} | \xi |^{i\eta} e^{(\pi/2)\eta} & \text{si} \quad \xi > 0, \\ | \xi |^{i\eta} e^{-(\pi/2)\eta} & \text{si} \quad \xi < 0. \end{cases} \tag{4.7}$$

Ainsi,

$$\forall \eta \in \mathbb{R},$$

$$\| Y_{-i\eta} \|_{\mathscr{C}_2} = \| \hat{Y}_{-i\eta} \|_\infty = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sup(e^{(\pi/2)\eta}, e^{-(\pi/2)\eta}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{|\eta|(\pi/2)}. \tag{4.8}$$

Par ailleurs,

$$\forall \eta \in \mathbb{R}, \qquad \| \xi D\hat{Y}_{-i\eta} \| \leqslant C_0(\eta) \text{ cte dépendant de } \eta \tag{4.9}$$

et d'après le théorème de Mihlin [12, 13, 18, 21]

$$\forall \eta \in \mathbb{R}, \qquad \hat{Y}_{-i\eta} \text{ est un multiplicateur de } \mathscr{F}(L^p(H)) \tag{4.10}$$

d'où la Proposition 4.3, l'inégalité (4.6) résultant de [12].

— On peut préciser davantage le comportement en η de $\| Y_{-i\eta} \|_{\mathscr{C}_p}$ dont on sait d'après les propriétés des semigroupes qu'il est de type exponentiel.

On a:

PROPOSITION 4.4. *Soit p, avec $1 < p < +\infty$ alors:*

$$\| Y_{-i\eta} \|_{\mathscr{C}_p(H)} \leqslant \gamma_p e^{\alpha_p |\eta|}$$

$$\alpha_p = \begin{cases} \dfrac{\Pi}{p} & \text{si} \quad 1 < p \leqslant 2 \\[2ex] \dfrac{\Pi}{p'} & \text{si} \quad p \geqslant 2, \ \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1. \end{cases} \tag{4.11}$$

Démonstration de la Proposition 4.4. Pour ne pas alourdir cet exposé par des considérations trop techniques un peu disproportionnées avec l'intérêt du résultat, nous donnons seulement les grandes lignes de la démonstration qui repose essentiellement sur le:

LEMME 4.1. *Soit* $1 < p \leqslant 2$. *Il existe une constante* $\gamma_p > 0$, *indépendante de* ϵ, *et* η *avec:*

$$\begin{gathered} |k_\epsilon(\eta; \varphi, \Psi)| \leqslant \gamma_p e^{(\pi|\eta|)/p} \| \varphi \|_{L^p(H)} \cdot \| \Psi \|_{L^{p'}(H)} \\ \varphi, \Psi \in \mathscr{D}(H), \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1. \end{gathered} \tag{4.12}$$

La démonstration du lemme peut se faire de diverses manières en suivant par exemple [4, 6, 21]. Elle utilise les inégalités de Calderón–Zygmund et le théorème de Marcinkiewicz.

Signalons seulement que l'estimation fondamentale est la suivante (voir par exemple [6]):

$$| E_y | \leqslant \gamma e^{\pi|\eta|} \left[\frac{1}{y^2} \int_{\mathbb{R}} [\varphi(x)]_y^2 \, dx + \frac{1}{y} \int_0^y | \varphi |^* (x) \, dx \right], \qquad \forall \varphi \in \mathscr{D}(H) \tag{4.13}$$

où

$$E_y = \left\{ x \Big/ \left| \frac{1}{\Gamma(-i\eta)} K_\epsilon * \varphi(x) \right| > y > 0 \right\}$$

$$| E_y | \text{ la mesure de Lebesgue de } E_y$$

$$\forall y > 0, \qquad t \to [\varphi(t)]_y = \begin{cases} |\varphi(t)| & \text{si} \quad |\varphi(t)| \leqslant y \\ y & \text{ailleurs} \end{cases} \tag{4.14}$$

$$| \varphi |^* \text{ est équimesurable à } | \varphi | .$$

Pour les détails, on renvoie à [6].

Le cas $p > 2$, résulte alors du Lemme 4.1 et en remarquant que ${}^tK_\epsilon$ a les mêmes propriétés de K_ϵ comme pour la Proposition 4.2.

4.3. *Exemple II.*

PROPOSITION 4.5. *Soit* $B = L^q(\mathbb{R}^n)$ $1 \leqslant q < +\infty$, $\forall \eta \in \mathbb{R}$, $Y_{-i\eta}$ *opère dans* $L^p(B)$ $1 < p < +\infty$ *avec une inégalité du type* (4.11).

Démonstration. Soit $\Psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+1}) : (t, x) \to \Psi(t, x)$ $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$. D'après la Proposition (4.4), on a:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad \int_{\mathbb{R}} | Y_{-i\eta} * \varphi(\cdot, x) (s)|^p \, ds \leqslant \gamma_p e^{p\alpha_p|\eta|} \int_{\mathbb{R}} | \varphi(t, x)|^p \, dt \tag{4.15}$$

et l'inégalité à vérifier est:

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}} | Y_{-i\eta} * \varphi(\cdot, x)(s)|^p \, ds \, dx \leqslant \gamma_p e^{p\alpha_p|\eta|} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} | \varphi(t, x)|^p \, dt \, dx. \tag{4.16}$$

Le cas $p \neq q$ se déduit du résultat pour $L^q(L^2(\mathbb{R}^n))$ et pour $L^q(L^q(\mathbb{R}^n))$ par application de la Proposition 4.1.

Remarque 4.1. La Proposition 4.5 s'étend aux espaces obtenus à partir de deux espaces de Lebesgue, (ou aux espaces obtenus de manière analogue pour une mesure quelconque) par interpolation et application des Propositions 4.1 et 4.2.

En particulier, pour:

$B = L_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ espace de Lorentz,

$B = W^{m,q}(\mathbb{R}^n)$ espace de Sobolev,

Espaces de Besov, etc....

Notons que dans tous ces espaces, la condition M (de Mihlin) est valable.

Remarque 4.2. On peut considérer aussi le cas d'espaces $L^p(\mathbb{R}^n; B)$. On prend alors avec $\eta = (\eta_1, ..., \eta_n)$

$$Y_{-i\eta} = Y^1_{-i\eta_1} \otimes \cdots \otimes Y^n_{-i\eta_n}.$$

Tous les résultats précédents s'appliquent. Mais ici on peut encore considérer les espaces à normes mixtes de Benedeck, Calderón, Panzone [3, 13].

Remarque 4.3. On vérifie aisément que $\{Y_{-i\eta*}\}_{\eta\in\mathbb{R}}$ n'opère pas dans $L^1(B)$. Si χ est la fonction caractéristique de $[a, b]$

$$\tilde{\chi}(t) = (Y_{-i\eta} * \chi)(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leqslant a \\ \dfrac{i}{\Gamma(-i\eta)\,\eta} \dfrac{1}{(t-a)^{i\eta}} & \text{si} \quad t \in]a, b[\\ \dfrac{i}{\Gamma(-i\eta)\,\eta}\left[\dfrac{1}{(t-a)^{i\eta}} - \dfrac{1}{(t-b)^{i\eta}}\right] & \quad t > b \end{cases}$$

d'où:

$$|\tilde{\chi}(t)| = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < a \\ \dfrac{1}{|\Gamma(-i\eta)\,\eta|} & \text{si} \quad t \in]a, b] \\ \dfrac{2}{|\Gamma(-i\eta)\,\eta|}\left|\sin\left|\dfrac{\eta}{2}\right| \log\dfrac{t-a}{t-b}\right| & \quad t > b \end{cases}$$

et:

$$\int_b^{+\infty} |\tilde{\chi}(t)|^p \, dt = \frac{2}{|\Gamma(-i\eta)\,\eta|} \int_0^{+\infty} \left| \sin \left| \frac{\eta}{2} \right| v \right|^p \frac{e^v}{(e^v-1)^2} \, dv.$$

diverge pour $p = 1$.

Remarque 4.4. Enfin, comme l'a signalé P. Kree dans [14], lorsqu'on a des résultats de continuité sur des noyaux dans des espaces du type $L^p(B)$, on peut en déduire des résultats dans des espaces $L_{\bar{\omega}}{}^p(B)$ où $\bar{\omega}$ est un poids satisfaisant à certaines conditions. Le cas d'espaces avec poids sera considéré ultérieurement.

Bibliographie

1. M. Artola, Dérivées intermédiaires dans les espaces de Hilbert pondérés: Application au comportement pour $t \to +\infty$ des solutions des équations différentielles opérationnelles, *Rend. Sem. Padova* **43** (1970), 177–202.
2. M. Artola, Sur un théorème d'interpolation, Colloque Analyse Fonctionnelle Bordeaux, Avril 1971, A paraître Mémoires de la Société Math. de France.
3. M. S. Baouendi, Sur une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés, *Bull. Soc. Math. France* **95** (1967), 45–87.
4. A. Benedeck, A. P. Calderón, and R. Panzone, Convolution operators on Banach space valued functions, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **48** (1963), 356–365.
5. A. P. Calderón, Intermediate spaces and interpolation, the complex method, *Studia Math.* **24** (1964), 113–190.
6. A. P. Calderón and A. Zygmund, On the existence of certain singular integrals, *Acta Math.* **88** (1952), 85–139.
7. J. Dieudonné, "Calcul Infinitésimal," Hermann, Paris, 1968.
8. E. Gagliardo, *Ric. Math.* **8** (1959), 24–51.
9. Ch. Goulaouic, Interpolation entre espaces vectoriels topologiques, Thèse, Paris, 1967.
10. G. H. Hardy, E. Landau, and J. E. Littlewood, Some inequalities satisfied by the integrals or dérivatives of real or analytic functions, *Math. Z.* **39** (1935), 677–695.
11. G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Polya, "Inequalities," Cambridge University Press, London, 1934.
12. L. Hörmander, Estimate for translation invariant operators in L^p spaces, *Acta Math.* **104** (1960), 93–140.
13. P. Kree, Sur les multiplicateurs dans $\mathscr{F}L^p$, *Ann. Inst. Fourier* **16** (1966), 31–89.
14. P. Kree, Propriétés de continuité dans L^p de certains noyaux, *Bull. U.M.I.* **22** (1967), 330–344.
15. J. L. Lions, Espaces intermédiaires entre espaces Hilbertiens et applications, *Bull. Math. R.P.R. Bucarest* **2** (1958), 419–432.
16. J. L. Lions, Dérivées intermédiaires et espaces intermédiaires, *C. R. Acad. Sci. Paris* **256** (1963), 4343–4345.
17. J. L. Lions and E. Magenes, "Problèmes aux Limites Non Homogènes et Applications," Vols. 1 and 2, Dunod, Paris, 1968.

18. S. G. MICHLIN, Sur les multiplicateurs des intégrales de Fourier, *Dokl.* **109** (1956), 701–703 (en russe).
19. L. NIRENBERG, *Ann. Scuola Normale Sup. Pisa* **13** (1959), 123–131.
20. J. PEETRE, Espaces d'interpolation et théorème de Sobolev, *Ann. Inst. Fourier* **16** (1966), 279–317.
21. J. SCHWARTZ, A remark on inequalities of Calderón–Zygmund type for vector valued functions, *Com. Pure Appl. Math.* **14** (1961), 785–799.
22. L. SCHWARTZ, "Th. des Distributions," Hermann, Paris, 2^e édition, 1957.
23. L. SCHWARTZ, Distributions à valeurs vectorielles, I, II, *Ann. Institut Fourier* **7** (1957), 1–141; **8** (1958), 1–209.